# Equações Integrais de Volterra em Escalas Temporais

Iguer Luis Domini dos Santos

Symposium in Real Analysis XXXVII

Junho de 2013

# Introdução

- **Cálculo em escalas temporais:** introduzido por (Hilger, 1988) para unificar o cálculo de diferença e o cálculo diferencial.
- **Aplicações em modelagem matemática:** (Agarwal et al., 2002); (Bohner and Peterson, 2003).
- **Inclusões Dinâmicas:** (Akin-Bohner and Sun, 2011); (Frigon and Gilbert, 2011); (Santos and Silva, 2013).
- **Cálculo das Variações:** (Bohner, 2004); (Hilscher and Zeidan, 2004); (Malinowska et al., 2011).
- **Teoria do Controle:** (Hilscher and Zeidan, 2011); (Liu et al., 2011); (Peng et al., 2011).
- **Programação Dinâmica:** (Hilscher and Zeidan, 2012); (Zhan et al., 2009).
- **Equações Integrais de Volterra:** (Adivar and Raffoul, 2010); (Kulik and Tisdell, 2008); (Pachpatte, 2009).

# Equações delta integrais

Com base em (Burton, 2005), (Kulik and Tisdell, 2008) estudam

$$x(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} k(t, s, x(s))\Delta s \qquad (1)$$

$$x(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} k(t, s, x(\sigma(s)))\Delta s \qquad (2)$$

onde $t \in \mathbb{T}$.

Existência de soluções supondo:

- $k : [a, \infty)^2_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua na primeira e terceira variável e rd-contínua na segunda variável.
-
$$\|k(t, s, p) - k(t, s, q)\| \le L\|p - q\|$$

$\forall\ (t, s) \in [a, \infty)^2_{\mathbb{T}},\ (p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$.

# Preliminares

Usamos as convenções:

- se $x \in \mathbb{R}^n$ denotamos a norma euclidiana de $x$ por $\|x\|$.
- se $A, \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$, tem-se $A_{\mathbb{T}} := A \cap \mathbb{T}$.
- Uma escala temporal $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio e fechado.
- Usaremos uma escala temporal $\mathbb{T}$ compacta, sendo $a = \min \mathbb{T}$ e $b = \max \mathbb{T}$.

### Definição

*Define-se* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *como*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$

*Estamos supondo que* $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$.

### Lema (Cabada and Vivero, 2006)

*Existem* $I \subset \mathbb{N}$ *e* $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$ *tal que*

$$RS := \{t \in \mathbb{T} : t < \sigma(t)\} = \{t_i\}_{i \in I}.$$

# Integração em escalas temporais

- A $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{T}$ será denotada por $\Delta$.
- $\Delta$ é constituída de conjuntos $\Delta$-mensuráveis.
- Para funções $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}}$ a noção de integração pode ser encontrada em (Bartle, 1995), (Royden, 1968) e (Rudin, 1987).

Denotamos a integral de uma função $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}}$ sobre $E \in \Delta$ por

$$\int_E f(s)\Delta s.$$

- Chamamos essa integral de $\Delta$-integral de Lebesgue de $f$ sobre $E$.

# Integração

- Denotaremos por $L_1(E, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ $\Delta$-integráveis sobre $E$.
- Dada uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ defina $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), \ t \in \mathbb{T} \\ f(t_i), \quad t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algum } i \in I, \end{cases}$$

onde $I \subset \mathbb{N}$ e $\{t_i\}_{i \in I} = RS$.

- Seja $E \subset \mathbb{T}$ e defina

$$\tilde{E} = E \cup \bigcup_{i \in I_E} (t_i, \sigma(t_i))$$

onde

$$I_E := \{i \in I : t_i \in E \cap RS\} .$$

**Teorema (Cabada and Vivero, 2006)**

*Seja $E \in \Delta$ tal que $b \notin E$. Então, $f \in L_1(E, \mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\tilde{f} \in L_1(\tilde{E}, \mathbb{R}^n)$ . Neste caso,*

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\tilde{E}} \tilde{f}(s)ds.$$

**Teorema**

*Sejam $\varphi : [t_0, t_1] \to [0, +\infty)$ Lebesgue integrável e $\psi : [t_0, t_1] \to [0, +\infty)$ contínua. Suponha que*

$$\varphi(t) \leq K + L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\varphi(s)ds$$

*para todo $t \in [t_0, t_1]$, com $K \geq 0$ e $L \geq 0$. Então*

$$\varphi(t) \leq K \exp L \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds$$

# Existência de soluções

- $g : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$.

Consideramos

$$x(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, x(s))\Delta s \tag{3}$$

$$x(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, x(\sigma(s)))\Delta s \tag{4}$$

onde $t \in \mathbb{T}$ e $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é a função incógnita.

- A existência de soluções contínuas para (4) pode ser encontrada em (Kulik and Tisdell, 2008).

# Existência

**Teorema**

*Sejam $L$ e $k$ números positivos. Suponha que*

a) *$f$ é uma função contínua.*
b) *$g$ é contínua em*

$$U = \{(t, s, x) : s, t \in \mathbb{T} \text{ e } |x - f(s)| \leq k\}$$

c) *$g$ satisfaz a condição de Lipschitz com relação a $x$*

$$|g(t, s, x) - g(t, s, y)| \leq L|x - y|$$

*em $\{(t, s, x) : a \leq s \leq t \leq b \text{ e } |x - f(s)| \leq k\}$.*

*Se $M = \max_U |g(t, s, x)|$, então existe $b_1 \in \mathbb{T} \setminus \{a\}$ tal que a equação integral (3) tem uma única solução contínua no intervalo $[a, b_1]_{\mathbb{T}}$.*

## Demonstração.

Se $\sigma(a) > a$ tome $b_1 = \sigma(a)$. Logo a função $x : [a, b_1]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ dada por $x(a) = f(a)$ e $x(b_1) = (b_1 - a)g(b_1, a, f(a)) + f(b_1)$ é uma solução para a equação **??**.

Se $\sigma(a) = a$ seja $b_1 \in \mathbb{T}$ tal que $b_1 > a$, $(b_1 - a)L < 1$ e $(b_1 - a) \leq \frac{k}{M}$.

Se $C([a, b_1]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ é o conjunto de todas as funções contínuas com domínio $[a, b_1]_{\mathbb{T}}$ e contradomínio $\mathbb{R}^n$ munido da norma do máximo, seja $\mathcal{F}$ dado por

$$\mathcal{F} = \{\psi \in C([a, b_1]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n) : \|\psi - f\|_\infty \leq k\}.$$

Defina o operador $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ por

$$T(\psi)(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, \psi(s))\Delta s.$$

□

# Continuidade de soluções

Sejam $x(t)$ e $y(t)$ soluções das equações

$$x(t) = f_1(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, x(s))\Delta s \tag{5}$$

e

$$y(t) = f_2(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, y(s))\Delta s \tag{6}$$

em $\mathbb{T}$, com $\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \delta$, então para $g$ de Lipschitz devemos ter $\|x - y\|_\infty \leq \epsilon$.

Hipóteses:

- $f_1, f_2 : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ e $g : U \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas, com

$$U = \{(t, s, x) : a \leq s \leq t \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

- Existe $L > 0$ tal que $|g(t, s, x) - g(t, s, y)| \leq L|x - y|$ em $U$.

## Teorema

*Sejam $x(t)$ e $y(t)$ soluções de (5) e (6), respectivamente, em $\mathbb{T}$. Se $\delta = \|f_1 - f_2\|_\infty$ então*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta e^{L(t-a)}$$

*para todo $t \in \mathbb{T}$.*

**Prova:** Temos

$$\|x(t) - y(t)\|$$
$$\leq \delta + L \int_{[a,t)_\mathbb{T}} \|x(s) - y(s)\| \Delta s.$$

Seja $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(s) = \|x(s) - y(s)\|$. Para todo $t \in [a, b]$ tem-se

$$\tilde{h}(t) \leq \delta + L \int_{[a,t)} \tilde{h}(s) ds$$

Do Lema de Gronwall temos

$$\tilde{h}(t) \leq \delta e^{L(t-a)}$$

Sejam $x(t)$ e $y(t)$ soluções das equações

$$x(t) = f_1(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, x(\sigma(s)))\Delta s \tag{7}$$

e

$$y(t) = f_2(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, y(\sigma(s)))\Delta s \tag{8}$$

em $\mathbb{T}$, com $\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \delta$, então para $g$ de Lipschitz devemos ter $\|x - y\|_\infty \leq \epsilon$.

### Teorema

*Sejam $x(t)$ e $y(t)$ soluções de (7) e (8), respectivamente, em $\mathbb{T}$. Se $\delta = \|f_1 - f_2\|_\infty$ e $L(b-a) < 1$ então*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta + L(b-a)\delta M e^{ML(t-a)}$$

*para todo $t \in \mathbb{T}$, onde $M = \frac{1}{1-(b-a)L}$.*

# Convergência de soluções

**Hipóteses:**

- $\{g_k\}$ uma sequência de funções contínuas,

$$\|g_k(t,s,x)\| \leq C(1+\|x\|)$$

para todo $(t,s,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$.

- $\{f_k\}$ uma sequência de funções $f_k : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ uniformemente limitada e equicontínua tal que $f_k \rightrightarrows f$.
- Para cada compacto $B \subset \mathbb{R}^n$, $g_k(t,s,x) \to g(t,s,x)$ em $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \times B$.
- $|g_k(t,s,x) - g_k(t,s,y)| \leq L|x-y|$ para todo $k$.

- para cada $\epsilon > 0$ e $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que [k um inteiro, $s \in \mathbb{T}$, $| t - t_1 | < \delta$, $t, t_1 \in \mathbb{T}$, $\|x\| \leq M$] implica $\|g_k(t,s,x) - g_k(t_1,s,x)\| \leq \epsilon \mid t - t_1 \mid$ .

### Teorema

*Para cada k,* $\psi_k(t)$ *é uma solução contínua de*

$$\psi_k(t) = f_k(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g_k(t,s,\psi_k(s))\Delta s,$$

$t \in \mathbb{T}$.
*Então existe uma subsequência* $\{\psi_{k_j}\} \subset \{\psi_k\}$ *e uma função* $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\psi_{k_j} \rightrightarrows \psi$, *e* $\psi$ *satisfaz*

$$\psi(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t,s,\psi(s))\Delta s$$

*em* $\mathbb{T}$.

## Teorema

*Para cada k,* $\psi_k(t)$ *é uma solução contínua de*

$$\psi_k(t) = f_k(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g_k(t, s, \psi_k(\sigma(s)))\Delta s,$$

$t \in \mathbb{T}$.
*Se* $C(b-a) < 1$*, então existe uma subsequência* $\{\psi_{k_j}\} \subset \{\psi_k\}$ *e uma função* $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\psi_{k_j} \rightrightarrows \psi$*, e* $\psi$ *satisfaz*

$$\psi(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, \psi(\sigma(s)))\Delta s$$

*em* $\mathbb{T}$.

- R. Agarwal, M. Bohner, D. O'Regan, A. Peterson, Dynamic equations on time scales: a survey, *J. Comput. Appl. Math.*, 141 (2002) 1-26.
- Akin-Bohner, E., Sun, S., Existence of solutions for second-order dynamic inclusions, *Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations*, Vol. 3, No.1-2, pp. 24-37, 2011.
- Atici, F.M., Biles, D.C., First order dynamic inclusions on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 292, No.1, pp. 222-237, 2004.
- Bartle, R.G., The Elements of Integration and Lebesgue Measure, John Wiley and Sons, New York, 1995.
- Belarbi, A., Benchohra, M., Ouahab, A., Existence results for impulsive dynamic inclusions on time scales, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 12, 22 pp., 2005.

- Bohner, M., Calculus of variations on time scales, *Dynamic Systems and Applications*, Vol. 13, No.3-4, pp. 339-349, 2004.
- Bohner, M., Peterson, A., Dynamic Equations on Time Scales, Birkhauser, Boston, 2001.
- Bohner, M., Tisdell, C.C., Second order dynamic inclusions, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol. 12, No.2, pp. 36-45, 2005.
- Cabada, A., Vivero, D.R., Criterions for absolute continuity on time scales, *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 11, No. 11, pp. 1013-1028, 2005.
- Cabada, A., Vivero, D.R., Expression of the Lebesgue $\Delta$-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of $\Delta$-antiderivatives, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 43, No.1-2, pp. 194-207, 2006.
- Castaing, C., Valadier, M., Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Vol. 580, Springer Lecture Notes in Mathematics, Berlin, 1977.

- Chang, Y.K., Li, W.T., Existence results for dynamic inclusions on time scales with nonlocal initial conditions, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 53, No. 1, pp. 12-20, 2007.
- Filippov, A. F., On certain questions in the theory of Optimal Control, *SIAM J. Control Optimization*, Vol. 1, pp. 76-84, 1962.
- Frigon, M., Gilbert, H., Systems of first order inclusions on time scales, *Journal of the Juliusz Schauder Center*, vol.37, pp.147-163, 2011.
- Guseinov, G.S., Integration on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 285, No.1, pp. 107-127, 2003.
- Hilger, S.: Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. Doktorthesis, Universität Würzburg, 1988.
- Hilger, S., Analysis on measure chains- a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results in Mathematics*, Vol. 18, No.1-2, pp. 18-56, 1990.

- Hilscher, R., Zeidan, V., Calculus of variations on time scales: weak local piecewise $C^1_{rd}$ solutions with variable endpoints, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 289, No.1, pp. 143-166, 2004.
- Hilscher, R., Zeidan, V., First order conditions for generalized variational problems over time scales, *Computers & Mathematics with Applications*, Issue 9, vol. 62, pp. 3490-3503, 2011.
- Hilscher, R., Zeidan, V., Hamilton-Jacobi theory over time scales and applications to linear-quadratic problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol.75, No. 2, pp. 932-950, 2012.
- R. Hilscher, V. Zeidan, Weak maximum principle and accessory problem for control problems on time scales, *Nonlinear Analysis*, Vol. 70, No.9, pp. 3209-3226, 2009.
- Lakshmikantham, V., Sivasundaram, S., Kaymakçalan, B., Dynamic Systems on Measure Chains, Kluwer Academic Pub, Vol.370, 1996.

- P.D. Loewen, Optimal Control via Nonsmooth Analysis, CRM Proceedings Lecture Notes, Vol.2, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
- Malinowska, A.B., Martins, N., Torres, D.F.M., Transversality conditions for infinite horizon variational problems on time scales, *Optimization Letters*, No 1, vol. 5, pp. 41-53, 2011.
- Pawluszewicz, E., Torres,D.F.M., Avoidance control on time scales, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 145 (2010) 527-542.
- Peng, Y., A Class of Optimal Control Problems on Time Scales, *Energy Procedia*, Vol. 16, pp. 1760-1767, 2012.
- Peng, Y., Xiang, X., Gong, Y., Liu, G., Necessary conditions of optimality for a class of optimal control problems on time scales, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 58, pp. 2035-2045, 2009.

- Peng, Y., Xiang, X., Jiang, Y., Nonlinear dynamic systems and optimal control problems on time scales, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Vol.17, pp. 654-681, 2011.
- Royden, H.L., Real Analysis, Collier-Macmillan Limited, London, 1968.
- Rudin, W., Real and Complex Analysis, third edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
- Santos,I.L.D., Silva,G.N., Absolute continuity and existence of solutions to vector dynamic inclusions in time scales, Submitted.
- Smirnov, G.V., Introduction to the Theory of Differential Inclusions, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- R.B. Vinter, Optimal Control, Birkhauser, Boston, 2000.

- Zhan, Z., Chen, S., Wei, W., A unified theory of maximum principle for continuous and discrete time optimal control problems, *Mathematical Control and Related Fields*, Vol. 2, No.2, pp. 195-215, 2012.
- Zhan, Z., Wei, W., Li, Y., Xu, H., Existence for calculus of variations and optimal control problems on time scales, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 8, 2012.
- Zhan, Z., Wei, W., Xu, H., Hamilton-Jacobi-Bellman equations on time scales, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 49, No.9-10, pp. 2019-2028, 2009.
- Zhan, Z., Wei, W., Necessary conditions for a class of optimal control problems on time scales, *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2009, 14 pp., 2009.
- Zhan, Z., Wei, W., On existence of optimal control governed by a class of the first-order linear dynamic systems on time scales, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 215, No. 6, pp. 2070-2081, 2009.